多段階の捜索割当ゲーム　(不確実で動的なシステムへの最適化理論とその展開)

AUTHOR(S):

宝崎, 隆祐

数理解析研究所講究録 1383 巻 2004 年 114-129

多段階の捜索割当ゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

Abstract: This paper deals with a multi-stage two-person zero-sum game called *multi-stage search allocation game*(MSSAG) of a searcher and a target. The searcher distributes his searching resources in a discrete search space in order to detect the evader. On the other hand, the evader moves under energy constraint to evade the searcher. At each stage of the search, the searcher is informed the target position and his consumed energy and the target knows the amount of searcher's resources used so far. A payoff of the game is the probability of detecting the target during searching time. There have been few search game, which dealt with the MSSAG. We formulate the problem as a dynamic programming problem. Then we solve the game to obtain a closed form of equilibrium point and investigate the properties of the solution theoretically and numerically.

1 はじめに

捜索理論は軍事的オペレーションにその起源をもつが故に，捜索活動に参加するプレイヤーとして敵対する二人を想定する捜索モデルの研究が大半である．したがって，捜索ゲームに関する研究の多くは2人ゼロ和ゲームで論じられることが多い．捜索問題において議論となる最適化の対象は，第1に捜索者の捜索計画であり，捜索理論の創始者と見なされる Koopman[15] を初め初期の研究[21] ではそのような one-sided な最適化問題が主として取り扱われた．その後，捜索者に敵対する逃避者，または目標の戦略をも議論するゲーム問題へと研究が進んだ．これらのゲームにおいて捜索者の得ることのできる情報の1つは，目標の捜索空間上での位置である．上述した捜索理論の起源を考えれば，対潜水艦戦における潜水艦の位置情報がその端的な例である．捜索者に暴露された目標の位置（デイタム点）や時刻情報をデイタム情報と呼び，この情報により動機付けられ開始する捜索活動をデイタム捜索，またそのゲームをデイタム捜索ゲームという．Meinardi[16] は，目標の探知確率を評価尺度とした離散直線上のデイタム捜索ゲームを論じている．捜索者は，デイタム情報のみを捜索開始時に知って，以後の捜索地点を選ぶ．目標は，あるデイタム点から出発し，現地点の隣接点の中から次の移動点を選ぶが，それまでの捜索者の捜索点情報を利用できるため，問題を多段確率ゲームに定式化している．しかしながら，直線上における存在確率をできるだけ一様にするように目標が移動することを当面の目標にして問題を解いているため，その解法は汎用性に欠けている．Meinardi の多段ゲームは，問題設定の面からの捜索ゲームの発展からはむしろ特異的であり，容易に想像できるように，まずは静止目標に対するゲームが，また1段階ゲームとして論じることがより簡単である．Danskin[3] は，対潜戦において，デイタム点から定針定速運動を行って

拡散運動をする潜水艦の進路，速力の最適選択戦略と対潜ヘリの音響センサーの垂下位置の最適選択戦略を，スピード・サークルと呼ばれる幾何学的な円盤の捜索空間を用いて１段階ゲームとして議論した．ある針路，速力はスピード・サークル上では１点で表せるため，彼の問題は実際には静止目標問題として解くことができた．初期の捜索ゲームに関し，静止目標問題や移動目標問題を解説した本にGal[6] があるが，直線や円のような幾何学的な捜索空間における１段階ゲームがメインのテーマである．捜索計画の最適化のみを議論するone-sidedな捜索問題では，捜索者の戦略は手持ちの捜索資源の配分が主流であったが，彼の研究は，捜索者の具体的な捜索経路や移動戦略を最適化するものとなっている．このように，目標側の逃避経路と同様，捜索者も捜索経路を戦略とする研究は，具体的な問題設定が明確であるため，その数は多く，対潜戦を扱ったゲームとしては，他にも爆雷の投下により潜水艦を撃沈しようとする１段階捜索ゲームを扱ったBaston and Bostock[1] などがある．Eagle[5] は，捜索者及び目標の位置が各時点での支払いを決め，その時間累積を総支払いとする１段階捜索ゲームを扱っている．また，特殊な捜索ゲームとして，四角形のフィールド上を移動する目標と，それを待ち受け戦略により捕捉しようとする捜索者との間の１段階ゲームを議論したRuckle問題があり，これにはRuckle[20] やGarnaev[8] 等の研究がある．以上のように，目標，捜索者ともに移動戦略をとるゲームには多段ゲームの研究もあり，前述したMeinardiの他，捜索者と目標が同じ地点を選ぶことによる探知発生までの消費時間を支払いとしたWashburn[22] の研究や，Meinardiと類似の問題設定に目標が探知されない安全地帯の効果を加味したNakai[18] の研究等がある．

初期の捜索問題において多用されたように，捜索資源の最適配分により効果的に目標を探知しようとする捜索者を対象とした捜索ゲームの研究の大半は１段階ゲームであり，静止目標を扱ったものにNakai[17] やIida, Hohzaki and Sato[13] がある．それらを移動目標問題へ拡張した研究にHohzakiやIidaらの研究 [14, 9, 10] があり，さらに一般化したゲームに対する数値解法をHohzaki and Iida[11] が提案している．目標の移動制約にエネルギー制約という現実的な制約を加味した面白い研究として連続捜索空間を扱ったWashburnや離散捜索空間を扱ったHohzakiら [23, 12] の研究があるが，いずれも１段階ゲームである．また，捜索資源の効率的投入により対象物を捜索する捜索者と，阻止資源の投入により捜索を阻もうとする阻止者との間の資源配分ゲームの数値解法を[2] が提案しているが，その問題はゲーム理論でいうところの凸ゲーム [19] と見なすことができる．

以上のように，捜索ゲームを捜索者及び目標の戦略の形態，及びゲームが１段階か多段階かで分類した場合，捜索者の戦略が捜索資源配分である多段捜索ゲームについてはほとんど研究されていないように見受けられる．捜索・逃避ゲームにおいて，捜索資源配分を戦略とする捜索者と，捜索空間上での現実的な移動戦略をとる目標との間のゲームを捜索割当ゲームと呼ぶ [7] が，ここでは，多段捜索割当ゲームについて離散捜索空間上で議論し，その均衡解を導出する．

2　モデルの記述と定式化

捜索者と目標が参加する次のような多段確率ゲームを考える．

A1. 捜索空間は離散的なセル空間 $\boldsymbol{K} = \{1, \cdots, K\}$ から成る．また，離散捜索時間上で問題を考え

るが，便宜上，捜索終了時刻を $n=0$ とし，残り時点数により時点を表す．

A2. 捜索者と目標という2人のプレイヤーがこのゲームに参加する．捜索者は，総予算制約下で捜索資源を各セルに投入し目標を探知することに努める．一方，目標は，ある移動制約の下でセル間を移動することにより捜索者の探知を逃れようとする．プレイヤーの戦略，情報集合及び利得とゲームの進行は以下のとおりである．

(1) 各時点 n の当初において，捜索者は，目標の現に存在するセル k と残存エネルギー量を知ることができる．一方，目標は，捜索者の過去の捜索資源配分及びそれまでに使用した予算を知る．

(2) その後，目標はセル k からの移動を確率的に決定することができ，その際の移動制約は次のとおりである．セル k から次に移動できるセル群は $N(k) \subseteq \boldsymbol{K}$ に制約されている．さらに，セル i, j 間の移動にはエネルギー $\mu(i,j)$ の消費が伴うため，移動可能なセル群は現在の残存エネルギーに依存する．ただし，$i \neq j$ に対し $\mu(i,j) > 0$ であり，また $\mu(i,i) = 0$ とし，エネルギーを消耗しても現に存在するセルに滞在し続けることだけは可能である．目標の保有する初期エネルギーを e_0 とする．

(3) 一方捜索者は，目標の移動セルを推理しつつ手持ちの残存予算内で各セルへの配分資源量を決定する．単位資源量をセル i へ投入するにはコスト $c_i > 0$ が必要とされる．捜索者の初期捜索予算は Φ_0 である．

(4) 目標がセル i に移動した場合，そのセルに投入された捜索資源 x により，捜索者は目標を確率 $1-q_i(x)$ で探知できる．すなわち，$q_i(x)$ は非探知確率を表すが，

$$q_i(x) = \exp(-\alpha_i\, x) \tag{1}$$

で与えられる．投入資源がなければ確率1で決して探知できず，投入資源量が増加するにつれこの非探知確率は凸関数的に減少するが，投入量が無限になるのをまって0となる．パラメータ $\alpha_i > 0$ はセル i における単位捜索資源投入の探知効率を表す．目標が探知された場合，捜索者は利得1を得，目標は同量を失い捜索は終了する．

(5) 時点 n で目標探知がなければ，時点は1つ進み $n-1$ となる．

A3. 捜索は目標が探知された時点，または最終時点 $n=0$ に到達して終了する．捜索者はこの多段ゲームのマキシマイザーとして，目標はミニマイザーとして行動する．

問題は，探知確率尺度の多段確率ゲームである．セル k に存在し残存エネルギー e を保有する目標が次に移動可能なセル群 $N(k,e)$ は，次式で与えられる．

$$N(k,e) \equiv \{i \in N(k) \mid \mu(k,i) \leq e\}\,. \tag{2}$$

この目標の採る移動戦略を $\{p(k,i), i \in \boldsymbol{K}\}$ で表す．ただし，$p(k,i) \geq 0$ は次にセル i に移動する確率であるが，上式から $p(k,i)=0,\ i \in \boldsymbol{K} - N(k,e)$ であり，$\sum_{i \in N(k,e)} p(k,i) = 1$ を満足する．以上から，この目標の移動戦略の実行可能領域は次式で与えられる．

$$P_k(e) = \left\{ \{p(k,i), i \in \boldsymbol{K}\} \;\middle|\; p(k,i) \geq 0, i \in N(k,e), p(k,i) = 0, i \in \boldsymbol{K} - N(k,e), \sum_{i \in N(k,e)} p(k,i) = 1 \right\}. \tag{3}$$

一方，時点 n における捜索者の資源配分計画を $\{\varphi(i,n), i \in \boldsymbol{K}\}$ で表そう．$\varphi(i,n) \geq 0$ はセル i へ投入する捜索資源量であるが，残存予算を Φ とすれば捜索資源の総コストはそれ以内になければならない．すなわち，$\sum_i c_i\varphi(i,n) \leq \Phi$ であるが，目標の移動可能セル群 $N(k,e)$ 以外のセルへの資源投入は無駄であることは明らかだから，捜索者の資源配分の実行可能領域 $\Psi(\Phi)$ は，次式で与えられる．

$$\Psi(\Phi) = \left\{ \{\varphi(i,n), i \in \boldsymbol{K}\} \;\middle|\; \varphi(i,n) \geq 0, i \in \boldsymbol{K},\ \varphi(i,n) = 0, i \in \boldsymbol{K} - N(k,e), \sum_{i \in N(k,e)} c_i\varphi(i,n) \leq \Phi \right\}. \tag{4}$$

時点 n の当初において残存エネルギー e を持ってセル k に存在する目標と捜索予算 Φ を持つ捜索者によるこの時点以降のゲームの値が存在すると仮定して，これを $v(n,k,e,\Phi)$ とおく．目標が確率 $p(k,i)$ でセル i に移動した場合，捜索者の資源投入 $\varphi(i,n)$ により確率 $1 - q_i(\varphi(i,n))$ で目標は探知され，探知されなければ次のステージへ移行するが，その場合，(セル,残存エネルギー) 状態として $(i, e - \mu(k,i))$ をもつ目標と残存捜索予算 $\Phi - \sum_{i \in N(k,e)} c_i\varphi(i,n)$ をもつ捜索者との時点 $n-1$ 以降のゲームへと遷移する．このことから，その存在を仮定したゲームの値 $v(n,k,e,\Phi)$ は次の漸化式を満足する．

$$\begin{aligned} v(n,k,e,\Phi) &= \max_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \min_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k,e)} p(k,i) \Bigg\{ 1 - q_i(\varphi(i,n)) \\ &\qquad + q_i(\varphi(i,n)) v(n-1, i, e - \mu(k,i), \Phi - \sum_{i \in N(k,e)} c_i\varphi(i,n)) \Bigg\} \\ &= 1 - \min_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k,e)} p(k,i) \left\{ 1 - v(n-1, i, e - \mu(k,i), \Phi - \textstyle\sum_j c_j\varphi(j,n)) \right\} e^{-\alpha_i\varphi(i,n)}. \end{aligned} \tag{5}$$

問題の性質より，$n = 0$, $\Phi = 0$ の場合の $v(\cdot)$ の初期値及び境界条件は次式で与えられる．

$$v(0,k,e,\Phi) = 0, \quad v(n,k,e,0) = 0\ . \tag{6}$$

また，$e = 0$ の場合は目標は捜索終了までセル k に存在するから，捜索者はこのセルにのみ捜索資源を投入し続けることになるが，投入可能最大資源 Φ/c_k を時点 $\{n, n-1, \cdots, 1\}$ においてどのように分割しようと，得られる目標探知確率は次式で評価できる．

$$v(n,k,0,\Phi) = 1 - \exp(-\alpha_k\Phi/c_k)\ . \tag{7}$$

記号 $h(n,k,e,\Phi) \equiv 1 - v(n,k,e,\Phi)$ を用いて漸化式 (5) を取り扱いやすくすれば，次式となる．

$$\begin{aligned} &h(n,k,e,\Phi) = \\ &\qquad \min_{\varphi \in \Psi(\Phi)} \max_{p \in P_k(e)} \sum_{i \in N(k,e)} p(k,i) h(n-1, i, e - \mu(k,i), \Phi - \textstyle\sum_j c_j\varphi(j,n)) \exp(-\alpha_i\varphi(i,n)). \end{aligned} \tag{8}$$

この場合の初期条件，境界条件は次式となる．

$$h(0,k,e,\Phi) = 1, \quad h(n,k,e,0) = 1, \quad h(n,k,0,\Phi) = \exp(-\alpha_k\Phi/c_k)\ . \tag{9}$$

さて，ゲームの値の存在を仮定して定式化を進めてきたが，このことが真であることは後ほど証明するとして，当面は漸化式 (8) にあるようにミニマックス最適化問題として議論してゆくことにす

る．まずこの問題を，時点 n で使用する予算分 Φ_n と各セルへの捜索資源配分の二重の最小化問題として次式のように変形する．

$$h(n,k,e,\Phi) = \min_{0\le\Phi_n\le\Phi}\ \min_{\varphi\in\Psi_n(\Phi_n)}\ \max_{p\in P_k(e)} \sum_{i\in N(k,e)} p(k,i)h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)\exp(-\alpha_i\varphi(i,n)). \quad (10)$$

ただし，$\Psi_n(\Phi_n)$ は次式で定義される．

$$\Psi_n(\Phi_n) = \left\{ \{\varphi(i,n), i\in \boldsymbol{K}\} \middle| \varphi(i,n)\ge 0, i\in\boldsymbol{K}, \varphi(i,n)=0, i\in\boldsymbol{K}-N(k,e), \sum_{i\in N(k,e)} c_i\varphi(i,n)=\Phi_n \right\}.$$

3　1ステージゲームの均衡解

ここでは，Φ, Φ_n は与えられているとして，(10) 式における均衡解を議論する．簡単化のため，$h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)$ を β_i に，$p(k,i)$ を p_i に，また $\varphi(i,n)$ を φ_i とおき，セル群 $N(k,e)$ を A として，次のミニマックス最適化問題を考える．

$$\min_{\{\varphi_i\}}\ \max_{\{p_i\}} \sum_{i\in A} p_i\beta_i\exp(-\alpha_i\varphi_i)\ . \quad (11)$$

凸ゲームに関する知見 [11] から，問題の最適値はマックスミニ値にも一致し，ゲームの値を与える．1段階ゲームであるこの問題は，最初に1つのセル i を確率 p_i で選んで隠れた後は他のセルへ移動しない静止目標と，総量 Φ_n の手持ち捜索資源を各セルに投入して目標を探知しようとする捜索者の間の潜伏・捜索ゲームと呼ばれる問題となり，いくつかの研究がある [4, 7] が，以後の問題とからめて包括的な説明を与えるため，また解の導出に多くの紙数を必要としないため，あえてここでは均解の導出法を説明しよう．φ_i の実行可能条件は $\varphi_i\ge 0,\ i\in A,\ \sum_{i\in A} c_i\varphi_i=\Phi_n$ であり，p_i のそれは $p_i\ge 0,\ i\in A,\ \sum_{i\in A} p_i = 1$ である．さて，

$$\max_{\{p_i\}} \sum_{i\in A} p_i\beta_i\exp(-\alpha_i\varphi_i) = \max_i \beta_i\exp(-\alpha_i\varphi_i) \quad (12)$$

と変形できることから，上の問題は次のような凸計画問題になる．

$$\begin{aligned} &\min\ \rho \\ s.t.\ &\beta_i\exp(-\alpha_i\varphi_i)\le\rho,\ i\in A \\ &\sum_{i\in A} c_i\varphi_i = \Phi_n \\ &\varphi_i\ge 0,\ i\in A\ . \end{aligned}$$

条件式の第1式，2式及び3式に対して双対変数 $\nu_i\ge 0$, λ, $\eta_i\ge 0$ を割り当てることにより，Lagrangean 関数を

$$L(\rho,\varphi;\nu,\lambda,\eta) = \rho + \sum_i \nu_i(\beta_i\exp(-\alpha_i\varphi_i)-\rho) + \lambda\left(\sum_{i\in A} c_i\varphi_i - \Phi_n\right) - \sum_i \eta_i\varphi_i$$

で定義すれば，均衡解の必要十分条件として次のような Karush-Kuhn-Tucker 条件（K-K-T 条件）を得る．

$$\partial L/\partial\rho = 1 - \sum_i \nu_i = 0 \tag{13}$$

$$\partial L/\partial\varphi_i = -\alpha_i\beta_i\nu_i \exp(-\alpha_i\varphi_i) + \lambda c_i - \eta_i = 0 \tag{14}$$

$$\beta_i \exp(-\alpha_i\varphi_i) \le \rho \tag{15}$$

$$\sum_i c_i\varphi_i = \Phi_n \tag{16}$$

$$\varphi_i \ge 0,\ i \in A \tag{17}$$

$$\nu_i(\beta_i \exp(-\alpha_i\varphi_i) - \rho) = 0,\ i \in A \tag{18}$$

$$\eta_i\varphi_i = 0,\ i \in A \tag{19}$$

$$\nu_i \ge 0,\ \eta_i \ge 0,\ i \in A\ . \tag{20}$$

まず，$\rho > 0$ 及び $\lambda > 0$ を注意しておく．前者は問題の性質から明らかである．後者も以下の理由で正しい．もし $\lambda = 0$ であれば，(14) 式より任意の i に対し $\alpha_i\beta_i\nu_i\exp(-\alpha_i\varphi_i) \le 0$ であるが，条件 (13) より少なくとも 1 つの ν_i は正でなければならないことに矛盾するからである．

(19) 式より，もし $\varphi_i > 0$ ならば $\eta_i = 0$ であり，(14) 式より $\alpha_i\beta_i\nu_i\exp(-\alpha_i\varphi_i) = \lambda c_i$ となる．また，$\varphi_i = 0$ ならば，$\alpha_i\beta_i\nu_i\exp(-\alpha_i\varphi_i) = \alpha_i\beta_i\nu_i \le \lambda c_i$ である．最適解は，上の両ケースを同時に表すことのできる次の表現式をもつ．

$$\varphi_i = \frac{1}{\alpha_i}\left[\log\frac{\alpha_i\beta_i\nu_i}{\lambda c_i}\right]^+ . \tag{21}$$

ただし $[\ \ ]^+$ の記号は $[x]^+ = \max\{x, 0\}$ を意味する．もし $\nu_i > 0$ ならば，相補性条件 (18) より $\beta_i\exp(-\alpha_i\varphi_i) = \rho$ となるから，

$$\varphi_i = \frac{1}{\alpha_i}\log\frac{\beta_i}{\rho} \tag{22}$$

と書くことができる．また，$\nu_i = 0$ ならば (14) 式より $\eta_i > 0$ となり，さらに (19) 式より $\varphi_i = 0$ である．したがって，$\varphi_i > 0$ ならば $\nu_i > 0$ であり，このとき最適解に関する 2 つの表現式 (21), (22) より $\nu_i = \lambda c_i/\rho\alpha_i$ の関係があり，また $\rho \le \beta_i$ でもある．$\rho > \beta_i$ の場合は相補条件 (18) より $\nu_i = 0$ であり，同時に $\varphi_i = 0$ でもある．結局，次の最適解を得る．

$$\varphi_i = \frac{1}{\alpha_i}\left[\log\frac{\beta_i}{\rho}\right]^+ . \tag{23}$$

この式と (16) 式から，最適値 ρ は次の方程式を解くことにより求められる．

$$\sum_{i\in A}\frac{c_i}{\alpha_i}\left[\log\frac{\beta_i}{\rho}\right]^+ = \sum_{i,\rho\le\beta_i}\frac{c_i}{\alpha_i}\log\frac{\beta_i}{\rho} = \Phi_n\ . \tag{24}$$

左辺は正の値をとる限り ρ について単調減少関数であるから，最適値 ρ は区間 $(0, \max_i\beta_i)$ において唯一存在する．前述したように，$0 < \nu_i$ ならば $\nu_i = \lambda c_i/\rho\alpha_i$ であるから，(13) 式より $\sum_{i,\rho\le\beta_i}\lambda c_i/\rho\alpha_i = 1$ であり，λ は次式により与えられる．

$$\lambda = \rho/\sum_{i,\rho\le\beta_i} c_i/\alpha_i\ .$$

これを再び $\nu_i = \lambda c_i/\rho\alpha_i$ に代入することにより，ν_i を与える次式を得る．

$$\nu_i = \begin{cases} c_i/\alpha_i \Big/ \sum_{j,\rho\le\beta_j} c_j/\alpha_j\ , & i \in \{j \in A \mid \rho \le \beta_j\} \\ 0, & \text{それ以外}\ . \end{cases} \tag{25}$$

以上より，方程式 (24) の唯一の根がゲームの値を与え，それを (23) 式に代入することにより唯一の最適解 φ を求めることができる．

次にもう一方のゲームの解である $\{p_i\}$ について議論しよう．まず，(12) 式による変形において明らかなように，$\beta_i < \rho$ であるために $\varphi_i = 0$ となる i に対しては $p_i = 0$ である．いま，最適解 p_i が与えられた場合の最小化問題 $\min_\varphi \sum_i p_i\beta_i \exp(-\alpha_i\varphi_i)$ を考えると，この問題に対する K-K-T 条件から，$\varphi_i > 0$ ならば $\lambda c_i = p_i\alpha_i\beta_i \exp(-\alpha_i\varphi_i)$ が得られる．これに (23) 式を代入することにより $p_i = \lambda c_i/\rho\alpha_i$ であるが，条件 $\sum_i p_i = 1$ 及び上述した $p_i = 0$ の議論より，(25) 式と全く同じ式を $\{p_i\}$ について導出できる．すなわち，最適な双対変数 ν_i は，ゲームの解 p_i を与えるのである．以後，(25) 式を p_i の最適解を与える式として読みかえることにする．

さて，以上で得られた 1 ステージゲームに関する結果は問題 (10) 式中の $\min_{\varphi\in\Psi_n(\Phi_n)} \max_{p\in P_k(e)}$ で始まる最適化に容易に適用でき，以下の漸化式を得る．

$$h(n,k,e,\Phi) = \min_{\Phi_n, 0\le\Phi_n\le\Phi} \rho(n,k,e,\Phi_n)\ . \tag{26}$$

$A_n(k,e,\Phi_n,\Phi) \equiv \{i \in N(k,e) \mid \rho \le h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)\}$ とすると，$\rho(n,k,e,\Phi_n)$ は次の方程式の解 ρ である．

$$\sum_{i\in N(k,e)} \frac{c_i}{\alpha_i}\left[\log\frac{h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)}{\rho}\right]^+ \ =\ \Phi_n \tag{27}$$

または，
$$\sum_{i\in A_n(k,e,\Phi_n,\Phi)} \frac{c_i}{\alpha_i}\log\frac{h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)}{\rho} \ =\ \Phi_n\ . \tag{28}$$

また，n ステージの最適解 φ^*, p^* は次式で与えられる．

$$\varphi^*(i,n) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_i}\log\frac{h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)}{\rho}, & i \in A_n(k,e,\Phi_n,\Phi) \\ 0, & \text{それ以外}\ . \end{cases} \tag{29}$$

$$p^*(k,i) = \begin{cases} c_i/\alpha_i \Big/ \sum_{j,\rho\le\beta_j} c_j/\alpha_j\ , & i \in A_n(k,e,\Phi_n,\Phi) \\ 0, & \text{それ以外}\ . \end{cases} \tag{30}$$

最後に，具体例として $h(1,k,e,\Phi)$ を求めてみよう．$h(0,k,e,\Phi) = 1$ であることから，原問題 (8) は (11) 式の 1 ステージゲームにおいて $\beta_i = 1$ としたものに他ならないから，容易に次のようなゲームの解を得ることができる．

$$\text{ゲームの値} \quad : \quad h(1,k,e,\Phi) = \exp(-\Phi \Big/ \sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j) \tag{31}$$

$$\text{捜索者の最適戦略} \quad : \quad \varphi(i,1) = \Phi/\alpha_i \Big/ \sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j\ ,\quad i \in N(k,e) \tag{32}$$

$$\text{目標の最適戦略} \quad : \quad p(k,i) = c_i/\alpha_i \Big/ \sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j\ ,\quad i \in N(k,e)\ . \tag{33}$$

4 多段ゲームの均衡解

以下の定理が成り立つ．

定理 1 *(i)* $\log h(n,k,e,\Phi)$ は Φ に関して非増加の凸関数である．
(ii) $h(n,k,e,\Phi)$ は e に関して非減少関数である．

(証明) (i) 非増加性は明らかである．凸性については，(31) 式から $n=1$ の場合には成り立つ．いま，$h(n-1,k,e,\Phi)$ については成り立っているとする．式 (28) を変形すれば次式を得る．

$$\left(\sum_{i\in A_n(k,e,\Phi_n,\Phi)}\frac{c_i}{\alpha_i}\right)\log\rho=\sum_{i\in A_n(k,e,\Phi_n,\Phi)}\frac{c_i}{\alpha_i}\log h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)-\Phi_n\ .$$

仮定により右辺は Φ_n に関し凸であり，$\log\rho$ も凸となる．$h(n,k,e,\Phi)>0,\ \rho(n,k,e,\Phi_n)>0$ は明らかだから，問題 (26) 式は次の問題を解くことに等しい．

$$\log h(n,k,e,\Phi)=\min_{0\le\Phi_n\le\Phi}\log\rho(n,k,e,\Phi_n)\ .$$

さて，$0\le\alpha\le1,\ \Phi^1>0,\ \Phi^2>0$ に対し，

$$\begin{aligned}\alpha\log h(n,k,e,\Phi^1)&=\min_{0\le\Phi_n^1\le\Phi^1}\alpha\log\rho(n,k,e,\Phi_n^1)\\(1-\alpha)\log h(n,k,e,\Phi^2)&=\min_{0\le\Phi_n^2\le\Phi^2}(1-\alpha)\log\rho(n,k,e,\Phi_n^2)\end{aligned}$$

であるが，$0\le\Phi_n^1\le\Phi^1,\ 0\le\Phi_n^2\le\Phi^2$ ならば $0\le\alpha\Phi_n^1+(1-\alpha)\Phi_n^2\le\alpha\Phi^1+(1-\alpha)\Phi^2$ であり，上述した $\log\rho(n,k,e,\Phi_n)$ の凸性より次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\alpha\log h(n,k,e,\Phi^1)+(1-\alpha)\log h(n,k,e,\Phi^2)\\&\ge\min_{\{\Phi_n^1,\Phi_n^2;0\le\alpha\Phi_n^1+(1-\alpha)\Phi_n^2\le\alpha\Phi^1+(1-\alpha)\Phi^2\}}\left\{\alpha\log\rho(n,k,e,\Phi_n^1)+(1-\alpha)\log\rho(n,k,e,\Phi_n^2)\right\}\\&\ge\min_{\{\Phi_n^1,\Phi_n^2;0\le\alpha\Phi_n^1+(1-\alpha)\Phi_n^2\le\alpha\Phi^1+(1-\alpha)\Phi^2\}}\log\rho(n,k,e,\alpha\Phi_n^1+(1-\alpha)\Phi_n^2)\\&=\min_{\{\Phi_n;0\le\Phi_n\le\alpha\Phi^1+(1-\alpha)\Phi^2\}}\log\rho(n,k,e,\Phi_n)=\log h(n,k,e,\alpha\Phi^1+(1-\alpha)\Phi^2)\ .\end{aligned}$$

以上により，$\log h(n,k,e,\Phi)$ の Φ に関する凸性が証明された．
(ii) 保有エネルギー e が多ければ目標の移動可能範囲は広がるとともに，セルにおける目標の存在確率を低くすることができる．以上のことは，限られた総量の捜索資源をセルに分配投入する捜索者を不利な状況におくため，$h(\cdot)$ の値は大きくなる．以上のような問題の性質からの説明を，式の上からも簡単に追うことができる．$e<e'$ ならば $N(k,e)\subseteq N(k,e')$ となり，(31) 式から $n=1$ の場合は成り立つ．いま，$h(n-1,k,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)\le h(n-1,k,e'-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)$ と仮定する．(3) 式から $P_k(e)\subseteq P_k(e')$ となることを考えると，漸化式 (10) から次式が成り立ち，証明は終わる．

$$\begin{aligned}&h(n,k,e,\Phi)\\&\le\min_{\Phi_n,0\le\Phi_n\le\Phi}\ \min_{\varphi\in\Psi_n(\Phi_n)}\ \max_{p\in P_k(e')}\sum_{i\in N(k,e')}p(k,i)h(n-1,i,e'-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n)e^{-\alpha_i\varphi(i,n)}\\&=h(n,k,e',\Phi)\ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

定理 1 で述べたように，一般的に $\log h(n,k,e,\Phi)$ は Φ に関し凸であり，したがって $h(n,k,e,\Phi)$ も凸関数となるが，次の定理はその具体的な形について述べたものである．

定理 2 時点 n における目標の存在セル k，残存エネルギー e，捜索者の残り捜索予算 Φ に対する $h(n,k,e,\Phi)$ は，次式のような表現形をもつ．

$$h(n,k,e,\Phi) = \exp(-\Phi/\gamma_n(k,e)) \ . \tag{34}$$

k，e のみに依存した係数 $\gamma_n(k,e)$ 及び時点 n における最適な使用予算 Φ_n^* は次により与えられる．まず，前ステージにおける $\{\gamma_{n-1}(j,e-\mu(k,j)),\ j\in N(k,e)\}$ を大きい順に並べたものを $\gamma_{n-1}(k_1,e-\mu(k,k_1)) \geq \gamma_{n-1}(k_2,e-\mu(k,k_2)) \geq \cdots \geq \gamma_{n-1}(k_m,e-\mu(k,k_m))$（$m$ は，$N(k,e)$ のセル数 $|N(k,e)|$）とする．

(i) $1 > \sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i/\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))$ ならば，

$$\gamma_n(k,e) = \sum_{i\in N(k,e)} \frac{c_i}{\alpha_i}, \tag{35}$$

$$\Phi_n^* = \Phi \ . \tag{36}$$

このとき，時点 n における最適戦略 $\varphi^*(i,n)$，$p^*(k,i)$ は次式で与えられる．

$$\varphi^*(i,n) = \frac{\Phi/\alpha_i}{\sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j},\ i\in N(k,e)\ , \tag{37}$$

$$p^*(k,i) = \frac{c_i/\alpha_i}{\sum_{j\in N(k,e)} c_j/\alpha_j},\ i\in N(k,e)\ . \tag{38}$$

(ii) そうでなければ，

$$s_n^* = \min\left\{ s \ \middle|\ 1 \leq \sum_{\tau=1}^{s} \frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))} \right\} \tag{39}$$

なる $s_n^* \in \{1,\cdots,m\}$ により，

$$\gamma_n(k,e) = \gamma_{n-1}(k_{s_n^*}, e-\mu(k,k_{s_n^*}))\left(1-\sum_{\tau=1}^{s_n^*-1}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau,e-\mu(k,k_\tau))}\right)+\sum_{\tau=1}^{s_n^*-1}\frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}} \tag{40}$$

$$\Phi_n^* = \frac{\eta_{n-1}(k,s_n^*,e)}{1+\eta_{n-1}(k,s_n^*,e)}\Phi \tag{41}$$

であり，時点 n における最適戦略は次式となる．

$$\begin{aligned}\varphi^*(i,n) &= \frac{\Phi/\alpha_i}{1+\eta_{n-1}(k,s_n^*,e)}\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}(k_{s_n^*},e-\mu(k,k_{s_n^*}))}-\frac{1}{\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))}\right),\\ &\qquad\qquad i\in\{k_1,\cdots,k_{s_n^*}\}\\ &= 0,\ \text{その他},\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}p^*(k,i) &= c_i/\alpha_i \Big/ \sum_{\tau=1}^{s_n^*} c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}\ ,\ i\in\{k_1,\cdots,k_{s_n^*}\}\ \text{のとき}\\ &= 0,\ \text{その他}\ .\end{aligned} \tag{43}$$

ただし，$\eta_{n-1}(k,s,e)$ は，

$$\eta_{n-1}(k,s,e) \equiv \frac{\sum_{\tau=1}^{s-1} c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_s, e-\mu(k,k_s))} - \sum_{\tau=1}^{s-1} \frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}$$

である．また，$n=1$ に対する $\gamma(\cdot)$ の初期値は次式で与えられる．

$$\gamma_1(k,e) = \sum_{j \in N(k,e)} c_j/\alpha_j \ . \tag{44}$$

(証明)　$n=1$ に対するゲームの値 (31) 式から，(34), (44) 式は正しい．いま，$\log h(n-1,i,e,\Phi) = -\Phi/\gamma_{n-1}(i,e)$ の形で表されるとし，$y \equiv -\log\rho \geq 0$ で ρ を置き換えると，方程式 (27) は次のようになる．

$$\sum_{i \in N(k,e)} \frac{c_i}{\alpha_i}\left[y - \frac{\Phi - \Phi_n}{\gamma_{n-1}(i, e-\mu(k,i))}\right]^+ = \Phi_n \ . \tag{45}$$

$h(n,k,e,\Phi)$ は (26) 式による ρ の最小化問題を解いて得られるが，これは y の最大化問題に等しく，以後はこの最大化問題を議論しよう．

まず，セル群 $N(k,e)$ の要素 i を $\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))$ の大きい順番に並べる．すなわち，$\gamma_{n-1}(k_1,e-\mu(k,k_1)) \geq \cdots \geq \gamma_{n-1}(k_m, e-\mu(k,k_m))$ である．$s \in \{1,2,\cdots,m-1\}$ に対し，

$$\frac{\Phi - \Phi_n}{\gamma_{n-1}(k_s, e-\mu(k,k_s))} \leq y \leq \frac{\Phi - \Phi_n}{\gamma_{n-1}(k_{s+1}, e-\mu(k,k_{s+1}))} \tag{46}$$

なる y では，(45) 式は次式のように整理できる．

$$\sum_{\tau=1}^{s} \frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}} y = \sum_{\tau=1}^{s} \frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}\Phi + \left(1 - \sum_{\tau=1}^{s} \frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}\right)\Phi_n \ . \tag{47}$$

上式を不等式 (46) に入れ y を消すことにより，この不等式が成り立つための Φ_n の範囲が次式のように求まる．

$$\frac{\eta_{n-1}(k,s,e)}{1+\eta_{n-1}(k,s,e)}\Phi \leq \Phi_n \leq \frac{\eta_{n-1}(k,s+1,e)}{1+\eta_{n-1}(k,s+1,e)}\Phi \ . \tag{48}$$

(48) 式による Φ_n の区間は $s=1,\cdots,m-1$ の順に接っしている．さて，(47) 式で表される y は直線であるから，Φ_n の係数が負であればこの区間の左端において y は最大となり，非負であれば右端において最大となる．それぞれの場合の最大値 y^L_{max}, y^R_{max} は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} y^L_{max} &= \Phi \Big/ \left\{\gamma_{n-1}(k_s, e-\mu(k,k_s))\left(1 - \sum_{\tau=1}^{s-1}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}\right) + \sum_{\tau=1}^{s-1}\frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}}\right\} \\ y^R_{max} &= \Phi \Big/ \left\{\gamma_{n-1}(k_{s+1}, e-\mu(k,k_{s+1}))\left(1 - \sum_{\tau=1}^{s}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}\right) + \sum_{\tau=1}^{s}\frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}}\right\} \ . \end{aligned} \tag{49}$$

さらに，(46) 式による区間の他に次の 2 つの区間を考慮しなければならない．

(i) $0 \leq y \leq (\Phi - \Phi_n)/\gamma_{n-1}(k_1, e-\mu(k,k_1))$ のときは，(45) 式から点 $\Phi_n = 0$ のみが Φ_n の許容範囲となり，また $\eta_{n-1}(k,1,e) = 0$ であることから，この場合は $s=1$ に対する区間 (48) で代用できる．

(ii) $(\Phi-\Phi_n)/\gamma_{n-1}(k_m, e-\mu(k,k_m)) \leq y$ のときは，$\Phi\eta_{n-1}(k,m,e)/(1+\eta_{n-1}(k,m,e)) \leq \Phi_n \leq \Phi$ が Φ_n の許容範囲であり，y は (47) 式で $s=m$ とした場合の直線となる．このケースでは右端 $\Phi_n=\Phi$ で最大となる可能性があり，そのときの y の値は $\Phi/\sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i$ となる．

式 (47) から，各区間における直線 y はその傾きを $s=1,2,\cdots$ とともに減少させるから，区分的線形凹関数となり，したがって傾きが負となる直前の端点で最大をとる．以上の議論より，$h(n,k,e,\Phi)$ は常に (34) 式の表現形をもち，係数 $\gamma_n(k,e)$ は漸化式 (40) または (35) 式で計算される．また，時点 n において使用する最適予算 Φ_n^* は (36) 及び (41) 式により与えられる．さらに，この Φ_n^* を用い，式 (23) 及び (25) において $\beta_i = h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\Phi_n^*)$, $\rho = h(n,k,e,\Phi)$ とおくことにより，最適戦略 $\varphi^*(i,n), p^*(k,i)$ に関する式 (37),(38)，または式 (42),(43) を得ることができる．
Q.E.D.

$\gamma_n(k,e)$ の初期値を (44) 式で定義したが，(9) 式の $h(0,k,e,\Phi)=1$ が (34) 式で表されるとすると，任意の (k,e) に対し $\gamma_0(k,e)=\infty$ である．この場合，$n=1$ に対しては定理 2 のケース (i) が任意の (k,e) に対して成り立つ．従って，(35) 式から得られる $\gamma_1(k,e)$ は (44) 式と一致する．すなわち，$\gamma_n(k,e)$ の初期値として $n=0$ に対する次式で定義しても差し支えない．

$$\gamma_0(k,e)=\infty \tag{50}$$

定理 2 から，係数 $\gamma_n(k,e)$ は，式 (49) の分母，または $y=\Phi/\sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i$ の分母の最小値により与えられると言い換えることもできるから，

$$G_n(k,e,s) \equiv \gamma_{n-1}(k_s, e-\mu(k,k_s))\left(1-\sum_{\tau=1}^{s-1}\frac{c_{k_\tau}/\alpha_{k_\tau}}{\gamma_{n-1}(k_\tau, e-\mu(k,k_\tau))}\right)+\sum_{\tau=1}^{s-1}\frac{c_{k_\tau}}{\alpha_{k_\tau}} \tag{51}$$

を用いれば次式を得る．

$$\gamma_n(k,e)=\min\left[\min_{s\in\{1,\cdots,m\}} G_n(k,e,s),\ \sum_{i\in N(k,e)}\frac{c_i}{\alpha_i}\right]. \tag{52}$$

さて，定理 2 において，$\{\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i)), i\in N(k,e)\}$ の値が大きい順番となるように並べた $N(k,e)$ のセルの並びが $\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$ であるが，任意のエネルギー e に対し $k\in N(k,e)$ であるから，ある $\tilde{s}_n$, $1\leq \tilde{s}_n \leq m$ に対し $k=k_{\tilde{s}_n}$ となる．以降では，セル k と同じ $\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))$ の値をもつセルの内で，セル k を最も左に置くものとする．すなわち，もし $1<\tilde{s}_n$ ならば，$\gamma_{n-1}(k_{\tilde{s}_n}, e-\mu(k,k_{\tilde{s}_n})) > \gamma_{n-1}(k_{\tilde{s}_n-1}, e-\mu(k,k_{\tilde{s}_n-1}))$ であるように並べるものと約束しよう．係数 $\gamma_n()$ の決定に関しては次の系が言える．

系 1 *(i)* 値 $h()$, $\gamma()$ は，ステージ数 n に対し単調非増加性をもつ．すなわち，

$$h(n,k,e,\Phi) \geq h(n+1,k,e,\Phi) \tag{53}$$

$$\gamma_n(k,e) \geq \gamma_{n+1}(k,e)\ . \tag{54}$$

(ii) 定理 *2* において値の降下順に整列させた $\gamma_{n-1}(k_s,e-\mu(k,k_s))$, $s=1,\cdots,m$ に関し，ステージ数 n に対する単調非増加性が成り立つ．すなわち，

$$\gamma_n(k_s,e-\mu(k,k_s)) \geq \gamma_{n+1}(k'_s,e-\mu(k,k'_s)),\ s=1,\cdots,m\ .$$

(iii) 与えられた (k,e) に対する最適解が定理 *2* のケース *(ii)* で決まる場合，$k = k_{\tilde{s}_n}$ とすると次式のいずれかが成り立つ．

$$\tilde{s}_n = s_n^* = 1 \text{ , または } \tilde{s}_n < s_n^* \text{ .} \tag{55}$$

(証明)　(i) 式 (34) から 2 つの不等式 (53), (54) は同値であり，ここでは前者の不等式だけを言う．式 (9), (31) から，$n=0$ に対してはこの性質は成り立つ．いま，任意の i, e, Φ に対して $h(n-1,i,e,\Phi) \geq h(n,i,e,\Phi)$ が成り立っているとすると，任意の $\{\varphi_j, j \in \boldsymbol{K}\} \in \Psi(\Phi)$ に対して

$$h(n-1,i,e-\mu(k,i),\Phi-\sum_j c_j\varphi_j)\exp(-\alpha_i\varphi_i) \geq h(n,i,e-\mu(k,i),\Phi-\sum_j c_j\varphi_j)\exp(-\alpha_i\varphi_i)$$

であるから，最適化問題 (8) 式を考慮すれば $h(n,k,e,\Phi) \geq h(n+1,k,e,\Phi)$ が言える．
(ii) もし，ある s に対し $\gamma_n(k_s, e-\mu(k,k_s)) < \gamma_{n+1}(k'_s, e-\mu(k,k'_s))$ となっているとする．(54) 式から，セル群 $\{k_{s+1},\cdots,k_m\}$ のいずれのセルもセル群 $\{k'_1,\cdots,k'_s\}$ の中にはない．つまり，$\{k_{s+1},\cdots,k_m\}$ は $\{k'_{s+1},\cdots,k'_m\}$ に一致している．したがって，セル k_s はセル群 $\{k'_1,\cdots,k'_s\}$ の中にあることになるが，このとき $\gamma_n(k_s,e-\mu(k,k_s)) < \gamma_{n+1}(k'_s,e-\mu(k,k'_s)) \leq \gamma_{n+1}(k'_{s-1},e-\mu(k,k'_{s-1})) \leq \cdots \leq \gamma_{n+1}(k'_1,e-\mu(k,k'_1))$ が成り立つから (54) 式に矛盾する．故に $\gamma_n(k_s,e-\mu(k,k_s)) \geq \gamma_{n+1}(k'_s,e-\mu(k,k'_s))$, $s=1,\cdots,m$ である．
(iii) もし $\tilde{s}_n > s_n^*$ ならば，

$$\begin{aligned}\gamma_n(k,e) &= \gamma_{n-1}(k_{s_n^*},e-\mu(k,k_{s_n^*})) + \gamma_{n-1}(k_{s_n^*},e-\mu(k,k_{s_n^*}))\eta_{n-1}(k,s_n^*,e) \\ &\geq \gamma_{n-1}(k_{s_n^*},e-\mu(k,k_{s_n^*})) > \gamma_{n-1}(k_{\tilde{s}_n},e-\mu(k,k_{\tilde{s}_n})) = \gamma_{n-1}(k,e)\end{aligned}$$

となり，(i) の性質に反する．故に，$\tilde{s}_n \leq s_n^*$ である．いま $\tilde{s}_n = s_n^*$ とし，さらに $1 < \tilde{s}_n$ を仮定すると，上と同様な考察により，$\gamma_n(k,e) > \gamma_{n-1}(k_{\tilde{s}_n},e-\mu(k,k_{\tilde{s}_n})) = \gamma_{n-1}(k,e)$ となり矛盾が生じる．故に，$\tilde{s}_n = s_n^*$ ならば，$\tilde{s}_n = s_n^* = 1$ である．　**Q.E.D.**

ゲーム値の表現式 (34) から分かるように，係数 $\gamma_n(k,e)$ は，残りステージ数 n，目標の現在のセル k とその残存エネルギー e が考慮された上で，現時点での捜索予算 Φ が非探知確率という評価尺度に関してもつ効率を示す総合指数となっているが，そもそも各セルの係数 c_i/α_i から積み上げ計算されたものである．c_i はコスト係数であり，α_i はセル i の単位捜索資源量当りの探知効率を示す係数であるから，その比 c_i/α_i を“探知効率コスト”と呼ぶ．式 (30) から分かるように，目標は探知効率コストの大きいセルを移動セルとして選択しようとする．時点 n での捜索実施範囲であるセル群 $\{k_1,\cdots,k_{s_n^*}\}$ が次のステージにおける指数 $\gamma_{n-1}(\cdot)$ のみによって決定され，予算 Φ には依存しないことも興味深い．この予算のうちステージ n で消費されるべき最適予算 Φ_n^* の比率も指数 $\gamma_{n-1}(\cdot)$ により決定され，予算の無駄な浪費による捜索セル範囲の拡張や，逆に本来使用すべき予算の出し惜しみによる捜索範囲の不必要な萎縮が起こらない捜索者の意思決定が可能となっている．

さて，系 1 の性質 (i) は，ステージ数の増加により非探知確率尺度のゲームの値が非増加となることを示している．ステージ数の増加は，捜索者にとっては手持ちの総予算 Φ の分割機会を増し，より効率のよい予算配分を可能とする．ところが，各時点で目標の存在セルが捜索者に暴露されると

いうこのゲームの性質から，ステージ数の増加による高い探知効率コスト係数をもつセルへの移動機会を増加させるという利点は，捜索者の利点を凌ぐことができない．性質 (i) は，このようなゲームの性格を示している．また，性質 (i) 及び式 (52) より $\sum_{i\in N(k,e)} c_i/\alpha_i \geq \gamma_n(k,e) \geq \gamma_{n+1}(k,e)$ であるから，あるステージにおける最適解が定理 2 のケース (i) で与えられるなら，それ以後のすべてのステージの (k,e) に対してもケース (i) が最適解を決定しているはずである．ステージ数 n の増加とともに，ケース (i) から (ii) の形態へ最適解が移行している場合もあるが，この移行が一度起こっていれば，それ以前のステージでケース (i) の解となっていることはない．また，ケース (ii) は，正の捜索努力資源が投入され，また目標により正の移動確率を与えられるセルが $N(k,e)$ の一部分となるケースであると言えるが，式 (32)，(33) から分かるように，最終時点 $n=1$ においては目標の移動可能なすべてのセルに手持ち捜索量のすべてを投入することとなる．また，系 1 (iii) の性質から，目標が現に存在するセル k はその時点での捜索対象とすべきことが述べられている．

さて，定理 2 によりゲームの解の存在を言うことができる．式 (34) から，漸化式 (8) は次のように書ける．

$$h(n,k,e,\Phi) = \min_{\varphi\in\Psi(\Phi)} \max_{p\in P_k(e)} \sum_{i\in N(k,e)} p(k,i)\exp\left(-\frac{\Phi-\sum_j c_j\varphi(j,n)}{\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))} - \alpha_i\varphi(i,n)\right).$$

目標が次の移動セル i を選択するという純粋戦略をとり，捜索者が捜索資源 $\{\varphi(i,n), i\in \boldsymbol{K}\}$ を配分するという純粋戦略をとった場合の利得関数が $\exp\{-(\Phi-\sum_j c_j\varphi(j,n))/\gamma_{n-1}(i,e-\mu(k,i))-\alpha_i\varphi(i,n)\}$ であるゲームを考えると，上の $h(n,k,e,\Phi)$ は，目標の混合戦略を $\{p(k,i), i\in N(k,e)\}$ としたときの期待利得のミニマックス値を求める問題である．なお，利得関数は φ について凸である．このようにマキシマイザーが有限離散の戦略をとり，他方のミニマイザーが連続無限戦略をとった場合のこの連続戦略に対し凸な利得関数をもつゲームには，マキシマイザーの混合戦略とミニマイザーの純粋戦略の範囲内で均衡解が存在することはすでに分かっている [11]．したがって，上のミニマックス値はマックスミニ値とも一致してゲームの値となる．結局，これまで仮定してきたゲームの解の存在について，次の定理を述べることができる．

定理 3 この多段確率ゲームは均衡解をもち，*(5),(6),(7)* 式により得られる $v(n,k,e,\Phi)$ は探知確率尺度での，また，*(8),(9)* 式により得られる $h(n,k,e,\Phi)$ は非探知確率尺度でのゲームの値を与える．

5 数値例

ここでは具体的な数値例を取り上げ，これまでに明らかにした最適解の性質を議論する．ただし，目標の非探知確率尺度のゲームの値は，(34) 式のとおり，$\Phi/\gamma_n(k,e)$ の指数関数で示されるから直接的には $\gamma_n(k,e)$ の値を議論することとする．

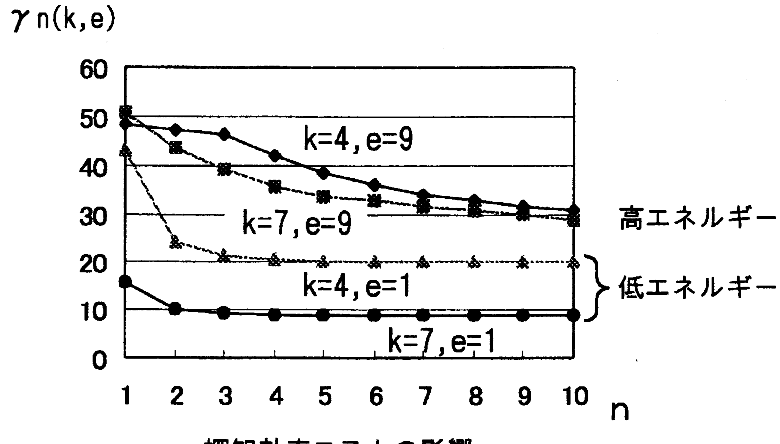
セル空間 $\boldsymbol{K}=\{1,2,\cdots,10\}$ におけるパラメータ c_i, α_i, $i\in\boldsymbol{K}$ を表 1 のように設定する．γ 値の初期値は探知効率コスト c_i/α_i により計算され，一般に目標は探知効率コストの高いセルを移動セルとして選択しようとするから，参考のため最終行にその数値を掲載した．また，セル $1,2,\cdots,10$ はこの順に隣接しており，どのセルからも 2 隣接セルまで移動可能であり（$N(k)=\{k-2,k-$

$1, k, k+1, k+2\} \cap K$)，また，セル間の移動にはそれらセルの隔たりの２乗のエネルギー消費を伴う（$\mu(i,j) = (i-j)^2$）とする．

表１．セル空間とパラメータ設定

セル番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_i	1	0.5	2	0.4	3	2.5	1.5	3.5	4	6
α_i	0.5	0.3	0.1	0.05	0.2	0.7	0.45	0.4	0.2	0.9
c_i/α_i	2	1.67	20	8	15	3.57	3.33	8.75	20	6.67

下図は，探知効率コストが 8 であるセル $k=4$ と 3.33 であるセル $k=7$ に対し，$e=9$ と $e=1$ の２つのケースについて γ 値を図示したものである．上２つの曲線が $(k,e)=(4,9),(7,9)$ の場合であり，下２つが $(k,e)=(4,1),(7,1)$ の場合である．エネルギー e が高いケースでは，目標は高い機動性を持つが故に高い探知効率コストのセルを移動セルとして利用できる環境にあることから，２つのセルに対する γ 値には大きな差はない．ところが，低エネルギー保有の場合には，低い探知効率コストをもつセル $k=7$ からは高探知効率コストをもつ遠くのセルへの移動が容易でなく，２つのセルに対する γ 値には明らかな差が生じている．また，系 1(i) で述べたように，ステージ数 n とともにその値が収束する様子が明確に示されている．



探知効率コストの影響

6 まとめ

この論文では，捜索資源の配分戦略をとる捜索者と移動戦略をとる目標の間で行われる捜索割当ゲームの多段確率ゲームを初めて議論した．その結果，ゲームの解やゲームの値に関する一般的な性質が，理論的に，また数値例により明らかにできた．これまで多くの研究で提案されてきたように，捜索者の捜索資源配分だけを最適化する one-sided な問題においては，方程式 (24) を解くような数値解法が最も現実的な解の導出法であった．しかし，本論文で示したように，相手の戦略に対する最適反応戦略となっているという均衡解の性質が問題の解をより簡単にし，定理２で述べたように，ゲームの値や解に対する明示的な式が得られた．すなわち，これらの式では，ゲームのステー

ジ数，捜索空間の各セルがもつ地域特性である探知効率コスト及び目標の残存エネルギーが寄与する項と捜索者の手持ちの捜索資源量が寄与する項とが分離されて含まれている．

設定したモデルでは，ステージ毎に目標の存在地点が捜索者に暴露されるが故に，目標が自身の存在域を秘匿するための長期的な移動戦略をとる余地がない．一方，上述したゲームの解における捜索資源量とその他のシステム・パラメータとの分離性により，目標が知る捜索者の残り捜索資源量は，目標自身の移動地点の候補を選定する際には役に立たないことが定理2から分かる．デイタム捜索ゲームと呼ばれる問題は，初期の目標地点情報が得られた後，捜索者には有効な情報が得られない捜索ゲームであり，通常は1段階ゲームとして定式化されることが多いが，上述した長期的な目標移動戦略を議論したい場合には，多段階のモデルがより適切であろうと思われる．しかしながら，デイタム捜索で開始されその後いくつかの海域でランダム捜索その他の捜索が引き続き行われるような捜索ゲームをひとまとめにして各段階のゲームと考えると，本論文で扱ったモデルも長期スパンで繰り返されるデイタム捜索ゲームと見なすことができる．

今回の議論では，捜索理論では基本的な評価尺度である目標探知確率を用いたが，得られた結果が他の評価尺度による多段ゲームの議論にどの程度拡張されるのかが興味のある当面の将来問題である．

参考文献

[1] V.J. Baston and F.A. Bostock, A One-Dimensional Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **36**, pp.479–490, 1989.

[2] V.J. Baston and A.Y. Garnaev, A Search Game with a Protector, *Naval Research Logistics*, **47**, pp.85–96, 2000.

[3] J.M. Danskin, A Helicopter versus Submarine Search Game, *Operations Research*, **16**, pp.509-517, 1968.

[4] J.M. Danskin, *The Theory of Max-Min*, Springer-Verlag, N.Y., 1967.

[5] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative Search-Evasion Games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.

[6] S. Gal, *Search Game*, Academic Press, N.Y., 1980.

[7] A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.

[8] A.Y. Garnaev, On a Ruckle Problem in Discrete Games of Ambush, *Naval Research Logistics*, **44**, pp.353–364, 1997.

[9] R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game with Reward Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**(4), pp.629–642, 1998.

[10] R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game When a Search Path Is Given, *European Journal of Operational Research*, **124**(1), pp.114–124, 2000.

[11] R. Hohzaki and K. Iida, A Solution for a Two-Person Zero-Sum Game with a Concave Payoff Function, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Science Publishing Co., London, pp.157–166, 1999.

[12] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete Search Allocation Game with Energy Constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**(1), pp.93–108, 2002.

[13] K. Iida, R. Hohzaki and K. Sato, Hide-and-Search Game with the Risk Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37**, pp.287–296, 1994.

[14] K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, A Search Game for a Mobile Target with the Conditionally Deterministic Motion Defined by Paths, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**(4), pp.501–511, 1996.

[15] B.O. Koopman, *Search and Screening*, Pergamon, pp.221-227, 1980.

[16] J.J. Meinardi, A Sequentially Compounded Search Game, *Theory of Games: Techniquea and Applications*, The English Universities Press, London, pp.285–299, 1964.

[17] T. Nakai, Search Models wiht Continuous Effort under Various Criteria, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **31**, pp.335–351, 1988.

[18] T. Nakai, A Sequential Evasion-Search Game with a Goal. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **29**(1986) 113–122.

[19] G. Owen, *Game Theory*, Academic Press, N.Y., 1995.

[20] W. H. Ruckle, Ambushing Random Walk II: Continuous Models, *Operations Research*, **29**(1981) 108–120.

[21] L.D. Stone, *Theory of Optimal Search*, pp.136–178, Academic Press, N.Y., 1975.

[22] A.R. Washburn, Search-Evasion Game in a Fixed Region, *Operations Research*, **28**, pp.1290-1298, 1980.

[23] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The Diesel Submarine Flaming Datum Problem, *Military Operations Research*, **6**, pp.19-33, 2001.